数理解析研究所講究録
第 1679 巻 2010 年 16-28

2-CATEGORICAL EXTENSION OF COHEN-MONTGOMERY DUALITY AND DERIVED EQUIVALENCES

浅芝 秀人

ABSTRACT. This report mainly explains a result of the preprint [2] arXiv:0905.3884 that given a group G the 2-category of small categories with G-action and G-equivariant functors is 2-equivalent to the 2-category of small G-graded categories and degree-preserving functors.

はじめに

この報告書では，G を群，$\Bbbk$ を可換環とし，特に断らなければ，圏，関手，多元環はすべて $\Bbbk$-線型と仮定する．論文 [6] において，Cohen と Montgomery は次の定理を示した．

定理. G が位数 n の有限群であるとき，G-作用を持つ多元環 A と，G-次数多元環 B に対して次の同型が成り立つ．

$$(A * G)\#G \cong M_n(A)$$
$$(B\#G) * G \cong M_n(B).$$

上において，$*$ は歪群環, $\#$ はスマッシュ積を表し，M_n は n 次全行列多元環を表す．ここで，多元環 A をただ 1 つの対象を持つ圏とみなすと，$M_n(A)$ は n 個の同型な対象を持つ圏と見なすことができ，A と $M_n(A)$ は圏として同値になることに注意する．ここでの目的は，この定理を次の要請を満たすように拡張することである．

(1) G を任意の群とすること．
(2) 多元環を圏にすること．
(3) 単に個々の圏ごとに同値を与えるだけでなく，圏のなす 2-圏の間の 2-同値に拡張すること．

(1) は [3, 9] などで，(2) は [5, 1] ですでに考察されているので，(3) がここでの中心課題になる．もう少し詳しく言うと，任意の群 G に対して，

- G-作用を持つ小圏のなす 2-圏 G-**Cat** と G-次数のついた小圏のなす 2-圏 G-**GrCat** をうまく定義し，
- 軌道圏構成（歪群環構成の一般化）を 2-関手 $?/G\colon G\text{-}\mathbf{Cat} \to G\text{-}\mathbf{GrCat}$ に拡張し，スマッシュ積構成を 2-関手 $?\#G\colon G\text{-}\mathbf{GrCat} \to G\text{-}\mathbf{Cat}$ に拡張して，
- この 2 つの 2-関手が互いに 2-擬逆であることを示す．

ここでは，普通の意味の（例えば [4, 8] で定義されている）2-自然変換を，**強い意味の 2-自然変換**といい，弱い意味の 2-自然変換（この概念を定義する等式を自然同値に取り替えたもの）を，単に **2-自然変換**ということにする．したがって，**2-擬逆**も弱い

2000 *Mathematics Subject Classification.* 18D05, 16W22, 16W50 .

意味で用いている.(実際には，半分は強い意味で成り立ち，強い意味の随伴対になっている.)

第 1 節では 2-圏 G-**Cat** を定義し，第 2 節では 2-圏 G-**GrCat** を定義する．ここで G-**GrCat** の射の定義条件を [1] より弱めたことが重要である．これによって，主定理で述べられた 2-同値を証明することができたことに注意しておく．第 3 節では，G-被覆関手を導入し，第 4 節で軌道圏を定義し，これによって G-被覆関手を特徴づける．第 5 節ではスマッシュ積を定義する．第 6 節では，軌道圏の構成とスマッシュ積の構成を 2-関手に拡張し，主定理を述べる．第 7 節では，導来同値への応用を述べ，第 8 節で例を挙げる．

1. 2-圏 G-Cat

1.1. G-圏.

定義 1.1. 圏 $\mathcal{C}$ と群準同型 $A\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ の組 $(\mathcal{C}, A)$ は，G-**作用**をもつ圏あるいは G-**圏**とよばれる．各 $a \in G$ に対して $A_a := A(a)$ とおく．混乱の恐れがないとき G-作用はつねに同じ文字 A で表し，単に $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, A)$ と書く．

記号 1.2. $\Bbbk$-線型な小圏の全体とそれらの間の $\Bbbk$-線型な関手全体，およびそれらの関手の間の自然変換のなす 2-圏を $\Bbbk$-**Cat** で表す．

注意 1.3. G をただ 1 つの対象 $*$ を持つ（$\Bbbk$-線型とは限らない）圏と見なせば，G-圏とは，関手 $\overline{A}\colon G \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ に他ならない（上の記号のもとで，$\mathcal{C} := \overline{A}(*)$, $A := \overline{A}|_{\mathrm{End}(*)}$）．各 $\mathcal{B} \in \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ に対して，$\Delta\mathcal{B} := (\mathcal{B}$, 自明な G-作用$)$ は G-小圏になる．

1.2. G-同変関手.

定義 1.4. $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を G-圏，$E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を関手とする．このとき E の**同変性調整子**とは，自然同型 $\rho_a\colon A_aE \to EA_a$ の族 $\rho = (\rho_a)_{a\in G}$ で，どの $a, b \in G$ に対しても次の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd} A_{ba}E = A_bA_aE \arrow[r, "A_b\rho_a"] \arrow[dr, "\rho_{ba}"'] & A_bEA_a \arrow[d, "\rho_bA_a"] \\ & EA_{ba} = EA_bA_a \end{tikzcd}$$

また，組 (E, ρ) を G-**同変関手**とよぶ．上の ρ_a がすべて恒等射にとれるとき，すなわち各 $a \in G$ に対して $A_aE = EA_a$ となるとき，E は**強い意味の**G-**同変関手**であるという．

注意 1.5. $\Bbbk$-**Cat** におけるどの関手 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ に対しても $\Delta F = (F, \mathbb{1})\colon \Delta\mathcal{B} \to \Delta\mathcal{B}'$ は強い意味の G-同変関手である．

1.3. G-同変関手の射.

定義 1.6. $(E, \rho), (E', \rho')\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を G-同変関手とする．(E, ρ) から (E', ρ') への**射**とは自然変換 $\eta\colon E \to E'$ で，各 $a \in G$ に対して次の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd} A_aE \arrow[r, "\rho_a"] \arrow[d, "A_a\eta"'] & EA_a \arrow[d, "\eta A_a"] \\ A_aE' \arrow[r, "\rho'_a"'] & E'A_a \end{tikzcd}$$

G-同変関手の合成は次で定義される.

補題 1.7. $\mathcal{C} \xrightarrow{(E,\rho)} \mathcal{C}' \xrightarrow{(E',\rho')} \mathcal{C}''$ を G-圏の間の G-同変関手とすると,

$$(E',\rho')(E,\rho) := (E'E, ((E'\rho_a)(\rho'_a E))_{a\in G})\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$$

も G-同変関手となる. これを (E,ρ) と (E',ρ') の**合成**という.

1.4. **2-圏 G-Cat.**

命題 1.8. 次で 2-圏が定義される.
- 対象は G-小圏の全体.
- 射はそれらの間の G-同変関手の全体.
- 2-射は G-同変関手の間の射の全体.
- 射の合成は上の補題で与えられたもの.
- 2-射の垂直合成, 水平合成は自然変換に対して普通に定義されるもの.

この 2-圏を G-**Cat** で表す.

注意 1.9. Δ は 2-関手 $\Delta\colon \Bbbk$-**Cat** $\to G$-**Cat** を導く.

2. 2-圏 G-GrCat

この節では, G-次数圏のなす 2-圏を定義する. この 2-圏での射, 次数保存関手の概念を以下のように拡張しておくことが, 後で 2-同値を導くためのキーポイントになる.

定義 2.1. (1) 圏 $\mathcal{B}$ と $\Bbbk$-加群の直和分解の族 $D := (\mathcal{B}(x,y) = \bigoplus_{a\in G}\mathcal{B}^a(x,y))_{x,y\in\mathcal{B}}$ との組 $(\mathcal{B}, D)$ は, 各 $x,y,z\in\mathcal{B}$ と各 $a,b\in G$ に対して, $\mathcal{B}^b(y,z)\cdot\mathcal{B}^a(x,y)\subseteq\mathcal{B}^{ba}(x,z)$ となるとき, G-**次数圏**とよばれる. $f\in\mathcal{B}^a(x,y)$ $(a\in G, x,y\in\mathcal{B})$ となるとき, $\deg f := a$ とおく.

(2) G-次数圏の間の関手 $H\colon\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ と写像 $r\colon \mathrm{obj}(\mathcal{B})\to G$ との組 (H,r) は, 各 $x,y\in\mathcal{B}$ と各 $a\in G$ に対して

$$H(\mathcal{B}^{r_y a}(x,y)) \subseteq \mathcal{A}^{a r_x}(Hx, Hy)$$

となるとき, **次数保存関手**とよばれる. この r を H の**次数調整子**とよぶ. 次数調整子が G の単位元への定数写像 1 にとれるとき, H は**強い意味の次数保存関手**であるという.

(3) $(H,r),(I,s)\colon\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ を G-次数圏の間の次数保存関手とする. 自然変換 $\theta\colon H\to I$ は, 各 $x\in\mathcal{B}$ に対して, $\theta x\in\mathcal{A}^{s_x^{-1}r_x}(Hx,Ix)$ となるとき, 次数保存関手 (H,r) から (I,s) への**射**とよばれる.

次数保存関手の合成は次で定義される.

補題 2.2. $\mathcal{B} \xrightarrow{(H,r)} \mathcal{B}' \xrightarrow{(H',r')} \mathcal{B}''$ を G 次数圏の間の次数保存関手とすると,

$$(H',r')(H,r) := (H'H, (r_x r'_{Hx})_{x\in\mathcal{B}})\colon \mathcal{B}\to\mathcal{B}''$$

も次数保存関手となる. これを (H,r) と (H',r') の**合成**とよぶ.

命題 2.3. 次で 2-圏が定義される.
- 対象は G-次数小圏の全体.
- 射はそれらの間の次数保存関手の全体.

- 2-射は次数保存関手の間の射の全体.
- 射の合成は上の補題で与えられたもの.
- 2-射の垂直合成，水平合成は自然変換に対して普通に定義されるもの.

この 2-圏を G-**GrCat** で表す.

3. 被覆関手

この節では，$\mathcal{C}$ を G-圏，$\mathcal{B}$ を圏とする．ここでは，[1, §1] から必要な定義と命題を引用する.

3.1. G-**不変関手**.

定義 3.1. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ を関手とする．このとき F の**不変性調整子**とは，自然同型 $\phi_a\colon F \to FA_a$ の族 $\phi := (\phi_a)_{a\in G}$ で，どの $a, b \in G$ に対しても次の図式を可換にするものである.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[dr, "\phi_{ba}"'] & FA_a \arrow[d, "\phi_b A_a"] \\ & FA_{ba} = FA_bA_a \end{tikzcd}$$

また，組 (F, ϕ) を G-**不変関手**とよぶ．これは，$\mathcal{B} = \Delta\mathcal{B}$ と見たときの G-同変関手に他ならない.

注意 3.2. $\phi_1 = \mathbb{1}_F$ であり，各 $a \in G$ に対して，$\phi_a^{-1} = \phi_{a^{-1}}A_a$ が成り立つ.

3.2. G-**不変関手の射**.

定義 3.3. $(F, \phi), (F', \phi')$ を G-不変関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$，$\eta\colon F \to F'$ を自然変換とする．このとき $\eta\colon (F, \phi) \to (F', \phi')$ は，各 $a \in G$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "\eta"'] & FA_a \arrow[d, "\eta A_a"] \\ F' \arrow[r, "\phi'_a"'] & F'A_a \end{tikzcd}$$

が可換であるとき，G-不変関手の間の**射**とよばれる.

記号 3.4. G-不変関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ 全体とそれらの間の射全体は圏をなす．この圏を $\mathrm{Inv}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ で表す.

補題 1.7の特別の場合として次が得られる.

補題 3.5. $(F, \phi)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ が G-不変関手で $H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ が関手ならば，$H(F, \phi) := (HF, (H\phi_a)_{a\in G})\colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ も G-不変関手になる.

3.3. G-**被覆関手**.

記号 3.6. $(F,\phi)\colon \mathcal{C}\to\mathcal{B}$を$G$-不変関手とし，$x,y\in\mathcal{C}$とする．$\Bbbk$-加群の準同型$F^{(1)}_{x,y}, F^{(2)}_{x,y}$を次で定義する．

$$\begin{aligned} F^{(1)}_{x,y}\colon \bigoplus_{a\in G}\mathcal{C}(A_a x, y) &\to \mathcal{B}(Fx,Fy),\ (f_a)_{a\in G}\mapsto \sum_{a\in G}F(f_a)\cdot\phi_a x\\ F^{(2)}_{x,y}\colon \bigoplus_{b\in G}\mathcal{C}(x, A_b y) &\to \mathcal{B}(Fx,Fy),\ (f_b)_{b\in G}\mapsto \sum_{b\in G}\phi_{b^{-1}}(A_b y)\cdot F(f_b)\end{aligned}$$

命題 3.7. 上において$F^{(1)}_{x,y}$が同型であることと$F^{(2)}_{x,y}$が同型であることとは同値である．

定義 3.8. $(F,\phi)\colon\mathcal{C}\to\mathcal{B}$を$G$-不変関手とする．

(1) (F,ϕ)は，各$x,y\in\mathcal{C}$に対して$F^{(1)}_{x,y}$が同型であるとき，G-**前被覆**であるという．(命題 3.7より，この条件は$F^{(2)}_{x,y}$が同型であることと同値である．)

(2) (F,ϕ)がG-前被覆で，関手Fが**稠密**である（すなわち各$y\in\mathcal{B}$はある$x\in\mathcal{C}$によって$Fx\cong y$とかける）とき，(F,ϕ)はG-**被覆**であるという．

4. 軌道圏

4.1. **標準** G-**被覆関手**.

定義 4.1. (1) G-圏$\mathcal{C}$に対してG-次数圏$\mathcal{C}/G$を次で定義し，これを$\mathcal{C}$のGによる**軌道圏**と呼ぶ (cf. [5, 7])．

- $\operatorname{obj}(\mathcal{C}/G) := \operatorname{obj}(\mathcal{C})$.
- 各$x,y\in\mathcal{C}/G$に対して，

$$(\mathcal{C}/G)(x,y) := \bigoplus_{a\in G}(\mathcal{C}/G)^a(x,y).$$

ただし，各$a\in G$に対して，$(\mathcal{C}/G)^a(x,y) := \mathcal{C}(A_a x, y)$.

- 各$f\colon x\to y$, $g\colon y\to z$ in $\mathcal{C}/G$に対して，

$$gf := \left(\sum_{\substack{a.b\in G\\ ba=c}} g_b\cdot A_b(f_a)\right)_{c\in G}.$$

(2) **標準関手** $P\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}/G$を次で定義する．

- $\mathcal{C}$の各対象xに対して，$Px := x$,
- $\mathcal{C}$の各射fに対して，$Pf := (\delta_{a,1}f)_{a\in G}$.

(3) 各$c\in G, x\in\mathcal{C}$に対して，$\psi_c x := (\delta_{a,c}\mathbb{1}_{A_c x})_{a\in G}\in(\mathcal{C}/G)(Px, PA_c x)$.

補題 4.2. 上において各$c\in G$に対して，$\psi_c : (\psi_c x)_{x\in\mathcal{C}}\colon P\to PA_c$は自然同型であり，$\psi := (\psi_c)_{c\in G}$は$P$の不変性調整子となり，$(P,\psi)\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}/G$は$G$-不変関手になる．

例 4.3. $\mathcal{C}=R$が多元環（＝ただ1つの対象を持つ圏）のとき，軌道圏R/Gは歪群環$R*G$（を圏と見なしたもの）と同型になる．

命題 4.4. 次が成り立つ．

(1) (P, ψ) は G-被覆関手である.
(2) (P, ψ) は, $\mathcal{C}$ からの G-不変関手のなかで**普遍的**である. すなわち, 各 G-不変関手 $(F, \phi)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ に対して, $(F, \phi) = H(P, \psi)$ をみたす関手 $H\colon \mathcal{C}/G \to \mathcal{B}$ がただ一つ存在する.

実は, この最後の主張は次のようにもっと精密化される.

系 4.5. 上において (P, ψ) は **2-普遍的**である. すなわち, 誘導される関手

$$(P, \psi)^*\colon \ \mathrm{Fun}(\mathcal{C}/G, \mathcal{B}) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$$

は, 圏の同型になる (単なる同値ではなく). ただし, $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}/G, \mathcal{B})$ は, $\mathcal{C}/G$ から $\mathcal{B}$ への関手全体とその間の自然変換の全体のなす圏を表す.

この事実は後に§6.1で使われる.

例 4.6. $\mathcal{C} = \Bbbk$ が体で, G の作用が自明な場合 $\mathcal{C}/G = \Bbbk G$ は普通の群環になる. $\mathcal{B} = \mathrm{Mod}\,\Bbbk$ を $\Bbbk$-ベクトル空間の圏とすると, $\mathrm{Fun}(\Bbbk G, \mathrm{Mod}\,\Bbbk) = \mathrm{Mod}\,\Bbbk G$ は左 $\Bbbk G$-加群の圏, $\mathrm{Inv}(\Bbbk, \mathrm{Mod}\,\Bbbk) = \mathrm{Rep}_{\Bbbk}\, G$ は G の $\Bbbk$-表現の圏になる. この場合, 上の圏の同型は, よく知られた同型 $\mathrm{Rep}_k\, G \cong \mathrm{Mod}\,\Bbbk G$ を与えている.

注意 4.7. 小圏の範囲内で考えると, 上の系4.5は自然な同型,

$$\Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}(\mathcal{C}/G, \mathcal{B}) \cong G\text{-}\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \Delta\mathcal{B})$$

を与える. したがって, $(?/G)$ と忘却関手 $G\text{-}\mathbf{GrCat} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ との合成が, Δ の左随伴になっていることが分かる.

4.2. **G-被覆関手の特徴付け.**

定理 4.8. G-不変関手 $(F, \phi)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ に対して次は同値である.

(1) (F, ϕ) は G-被覆関手である.
(2) (F, ϕ) は G-前被覆関手であり, $\mathcal{C}$ からの G-前被覆関手のなかで普遍的である.
(3) (F, ϕ) は $\mathcal{C}$ からの G-不変関手のなかで普遍的である.
(4) G-不変関手として $(F, \phi) \cong H(P, \psi)$ となる圏同値 $H\colon \mathcal{C}/G \to \mathcal{B}$ が存在する.
(5) $(F, \phi) = H(P, \psi)$ となる圏同値 $H\colon \mathcal{C}/G \to \mathcal{B}$ が存在する.

4.3. **G-同変関手と G-不変関手の合成.** 補題1.7の特別の場合として次の (1) が得られる.

補題 4.9. (1) $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を G-圏, $\mathcal{B}$ を圏とし, $\mathcal{C}' \xrightarrow{(E,\rho)} \mathcal{C} \xrightarrow{(F,\phi)} \mathcal{B}$ において (E, ρ) を G-同変関手, (F, ϕ) を G-不変関手とする. このとき,

$$(F, \phi)(E, \rho) := (FE, ((F\rho_a)(\phi_a E))_{a \in G})\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{B}$$

は, G-不変関手になる.

(2) 上において (E, ρ) が G-同変な圏同値で (F, ϕ) が G-被覆関手であれば, 合成 $(F, \phi)(E, \rho)$ は, G-被覆関手となる. したがって, $\mathcal{C}'/G$ と $\mathcal{B}$ は圏同値になる.

5. スマッシュ積

定義 5.1. G-次数圏 $\mathcal{B}$ に対して**スマッシュ積** $\mathcal{B}\#G$ という G-圏が次で定義される．

- $\mathrm{obj}(\mathcal{B}\#G) := \mathrm{obj}(\mathcal{B}) \times G$. 各 $x \in \mathcal{B}$ と $a \in G$ に対して，$x^{(a)} := (x, a)$ とおく．
- 各 $x^{(a)}, y^{(b)} \in \mathcal{B}\#G$ に対して，$(\mathcal{B}\#G)(x^{(a)}, y^{(b)}) := \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y)$
- 各 $x^{(a)}, y^{(b)}, z^{(c)} \in \mathcal{B}\#G$ に対して，合成は次の可換図式で定義される．

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{B}\#G)(y^{(b)}, z^{(c)}) \times (\mathcal{B}\#G)(x^{(a)}, y^{(b)}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\mathcal{B}\#G)(x^{(a)}, z^{(c)}) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{B}^{c^{-1}b}(y, z) \times \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y) \arrow[r] & \mathcal{B}^{c^{-1}a}(x, z),
\end{tikzcd}$$

ただし，下段の射は $\mathcal{B}$ の合成で与える．

補題 5.2. $\mathcal{B}\#G$ は自由 G-作用を持つ．

Proof. 各 $c \in G$ と $x^{(a)} \in \mathcal{B}\#G$ に対して，$A_c x^{(a)} := x^{(ca)}$. 各 $f \in (\mathcal{B}\#G)(x^{(a)}, y^{(b)}) = \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y) = (\mathcal{B}\#G)(x^{(ca)}, y^{(cb)})$ に対して，$A_c f := f$. □

定義 5.3. G-次数圏 $\mathcal{B}$ に対して関手 $Q_{\mathcal{B},G} := Q \colon \mathcal{B}\#G \to \mathcal{B}$ を次のように定義する．

- 各 $x^{(a)} \in \mathcal{B}\#G$ に対して，$Q(x^{(a)}) = x$
- 各 $f \in (\mathcal{B}\#G)(x^{(a)}, y^{(b)}) = \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x, y)$ に対して，$Q(f) := f$.

命題 5.4. 各 $a \in G$ に対して，$Q = QA_a$ が成り立ち，$Q = (Q, \mathbb{1}) \colon \mathcal{B}\#G \to \mathcal{B}$ は G-被覆関手になる．したがって特に，Q は標準 G-被覆関手 $(P, \psi) \colon \mathcal{B}\#G \to (\mathcal{B}\#G)/G$ を通過する．すなわち，$Q = H(P, \psi)$. をみたす圏同値 $H \colon (\mathcal{B}\#G)/G \to \mathcal{B}$ がただ 1 つ存在する．

例 5.5. (1) G が有限群で，$\mathcal{B} = R = \bigoplus_{a \in G} R_a$ が G-次数多元環であるとき，$R\#G = (R_{b^{-1}a})_{(a,b) \in G \times G}$ は行列環になる．(G が無限群のときもこの形になる．ただし，各元の成分はほとんどすべて 0.)

(2) $\Bbbk$ を体，$\mathcal{B} = R$ を多元環とし，$T(R) := R \ltimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(R, \Bbbk)$ を自明拡大とする．R の元の次数を 0，$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(R, \Bbbk)$ の元の次数を -1 として $T(R)$ を $\mathbb{Z}$-次数多元環とみると，$T(R)\#\mathbb{Z}$ は反復圏 $\hat{R}$ と同型になる．

6. 2-関手

6.1. 軌道 2-関手.

定義 6.1. $(E, \rho), (E', \rho') \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を G-**Cat** の射，$\eta \colon (E, \rho) \to (E', \rho')$ を G-**Cat** の 2-射とする．また，$(P, \psi) \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$, $(P', \psi') \colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}'/G$ を標準関手とする．命題 4.9 より $(P', \psi')\eta \colon (P', \psi')(E, \rho) \to (P', \psi')(E', \rho')$ は $\mathrm{Inv}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'/G)$ のなかにある．このとき，圏の同型 $(P, \psi)^* \colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}/G, \mathcal{C}'/G) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'/G)$ を用いて，次を定義する．

$$\begin{aligned}
(E, \rho)/G &:= (P, \psi)^{*-1}((P', \psi')(E, \rho)), \\
\eta/G &:= (P, \psi)^{*-1}((P'\psi')\eta).
\end{aligned}$$

以上の構成は次の図式で考えると分かりやすい.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "{(E,\rho)}"] \arrow[r, bend right, "{(E',\rho')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "{(P,\psi)}"'] \arrow[dr, bend left, "{(P',\psi')(E,\rho)}"] \arrow[dr, bend right, "{(P',\psi')(E',\rho')}"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow (P',\psi')\eta"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "{(P',\psi')}"] \\
\mathcal{C}/G \arrow[r, bend left, "{(E,\rho)/G}"] \arrow[r, bend right, "{(E',\rho')/G}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta/G"] & \mathcal{C}'/G.
\end{tikzcd}$$

η/G の具体的な形は，各 $x \in \mathcal{C}$ に対して

$$(\eta/G)Px := P'(\eta x) \in (\mathcal{C}'/G)^1(((E,\rho)/G)Px, ((E',\rho')/G)Px)$$

で与えられる．このとき，$(E,\rho)/G$ は強い意味の次数保存関手になり，η/G は G-**GrCat** の 2-射になる.

補題 6.2. 上の定義により軌道圏構成は 2-関手

$$?/G\colon G\text{-}\mathbf{Cat} \to G\text{-}\mathbf{GrCat}$$

に拡張される.

6.2. スマッシュ2-関手.

定義 6.3. G-**GrCat** の射 $(H,r)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ に対して，G-**Cat** の射 $(H,r)\#G\colon \mathcal{B}\#G \to \mathcal{B}'\#G$ を次で定義する.

- 各 $x^{(a)} \in \mathcal{B}\#G$ に対して，
$$((H,r)\#G)(x^{(a)}) := (Hx)^{(ar_x)}.$$
- 各 $f \in (\mathcal{B}\#G)(x^{(a)}, y^{(b)}) = \mathcal{B}^{b^{-1}a}(x,y)$ に対して
$$((H,r)\#G)(f) := H(f).$$
これは，$\mathcal{B}'^{r_y^{-1}b^{-1}ar_x}(Hx, Hy) = (\mathcal{B}'\#G)((Hx)^{(ar_x)}, (Hy)^{(br_y)})$ の元である.

このとき $(H,r)\#G$ は強い意味の G-同変関手となるので，$(H,r)\#G = ((H,r)\#G, 1)\colon \mathcal{B}\#G \to \mathcal{B}'\#G$ は G-**Cat** の射になっている.

次に $(H',r')\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ を G-**GrCat** の射とし $\theta\colon (H,r) \to (H',r')$ を 2-射とする. $\theta\#G\colon (H,r)\#G \to (H',r')\#G$ を各 $x^{(a)} \in \mathcal{B}\#G$ に対して，

$$(\theta\#G)x^{(a)} := \theta x$$

で定義する．すると $\theta\#G$ は，G-**Cat** の 2-射になる.

補題 6.4. 上の定義によりスマッシュ積構成は 2-関手

$$?\#G\colon G\text{-}\mathbf{GrCat} \to G\text{-}\mathbf{Cat}$$

に拡張される.

6.3. **主定理.**

定理 6.5. 2-関手 $?/G$, $?\#G$ は互いに他の 2-擬逆になり，ともに 2-圏同値である．したがって 2-圏 G-**Cat** と G-**GrCat** は 2-同値である．より精密にいうと，4 つの 2-自然同型

$$\begin{aligned} \varepsilon\colon \mathbb{1}_{G\text{-}\mathbf{Cat}} &\to (?\#G)(?/G) \\ \varepsilon'\colon (?\#G)(?/G) &\to \mathbb{1}_{G\text{-}\mathbf{Cat}} \\ \omega\colon \mathbb{1}_{G\text{-}\mathbf{GrCat}} &\to (?/G)(?\#G) \\ \omega'\colon (?/G)(?\#G) &\to \mathbb{1}_{G\text{-}GrCat} \end{aligned}$$

は，

$$\varepsilon'_{\mathcal{C}}\varepsilon_{\mathcal{C}} = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}, \tag{6.1}$$

$$\varepsilon_{\mathcal{C}}\varepsilon'_{\mathcal{C}} \cong \mathbb{1}_{(\mathcal{C}/G)\#G}, \tag{6.2}$$

$$\omega'_{\mathcal{B}}\omega_{\mathcal{B}} = \mathbb{1}_{\mathcal{B}}, \tag{6.3}$$

$$\omega_{\mathcal{B}}\omega'_{\mathcal{B}} \cong \mathbb{1}_{(\mathcal{B}\#G)/G}, \tag{6.4}$$

をみたし，各 $\mathcal{C} \in G$-**Cat** と $\mathcal{B} \in G$-**GrCat** に対して，$\varepsilon'_{\mathcal{C}}$ は強い意味の G-同変関手で，$\omega_{\mathcal{B}}$ は強い意味の次数保存関手である．さらに，ε と ω' は強い意味の 2-自然変換である．したがって特に，$?/G$ は $?\#G$ の強い意味の左 2-随伴である．すなわち，図式

$$\begin{tikzcd} G\text{-}\mathbf{GrCat} \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "?\#G"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\omega'"] & G\text{-}\mathbf{GrCat} \arrow[dr, "?\#G"] & \\ & G\text{-}\mathbf{Cat} \arrow[ur, "?/G"'] \arrow[rr, "1"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & G\text{-}\mathbf{Cat} \end{tikzcd} \tag{6.5}$$

の pasting は $\mathbb{1}_{?\#G}$ に等しく，図式

$$\begin{tikzcd} & G\text{-}\mathbf{GrCat} \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "?\#G"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\omega'"] & G\text{-}\mathbf{GrCat} \\ G\text{-}\mathbf{Cat} \arrow[ur, "?/G"] \arrow[rr, "1"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & G\text{-}\mathbf{Cat} \arrow[ur, "?/G"'] & \end{tikzcd} \tag{6.6}$$

の pasting は $\mathbb{1}_{?/G}$ に等しい．

7. 導来同値

この節では $\mathcal{C}$ を G-圏とする．

定義 7.1. (1) 任意の圏 $\mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{A}$ から $\operatorname{Mod}\Bbbk$ への反変関手を**右 $\mathcal{A}$-加群の圏**という．それらの全体とそれらの間の自然変換の全体のなす圏を $\operatorname{Mod}\mathcal{A}$ とおく．

(2) 各関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して，$F^{\boldsymbol{\cdot}}\colon \operatorname{Mod}\mathcal{B} \to \operatorname{Mod}\mathcal{C}$ を $F^{\boldsymbol{\cdot}}M := M \circ F$ で定義する．これを F の**引き上げ**という．$F^{\boldsymbol{\cdot}}$ は左随伴 $F_{\boldsymbol{\cdot}}$ をもつ．$F_{\boldsymbol{\cdot}}$ を F の**押し下げ**という．

定義 7.2. (1) G-圏 $\mathcal{C}$ に対して，$\operatorname{Mod}\mathcal{C}$ は，G-作用を ${}^{a}X := X \circ A_a^{-1}$ $(\forall a \in G, X \in \operatorname{Mod}\mathcal{C})$ で定義することにより，また G-圏となる．

(2) $X \in \operatorname{Mod}\mathcal{C}$ は，$X \cong \mathcal{C}(\text{-}, x_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}(\text{-}, x_n)$ となる有限個の対象 $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{C}$ が存在するとき，**有限生成射影的**とよばれる．

(3) 有限生成射影的$\mathcal{C}$-加群のなす，$\operatorname{Mod}\mathcal{C}$ の充満部分圏を $\operatorname{prj}\mathcal{C}$ で表し，$\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})$ で $\operatorname{prj}\mathcal{C}$ における有界複体のなすホモトピー圏を表す．$\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})$ にも自然に成分ごとにG-作用が定義される．

定義 7.3. (1) $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})$ の充満部分圏 E は次の性質を持つとき，$\mathcal{C}$ に対する**傾部分圏**とよばれる：

(a) $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})(U, V[i]) = 0$ がすべての $U, V \in E$ とすべての $i \neq 0$ に対して成り立つ;
(b) $\mathcal{C}(\text{-}, x) \in \operatorname{thick} E$ がすべての $x \in \mathcal{C}$ について成り立つ．ただし，$\operatorname{thick} E$ は E で生成される *thick* 部分圏，すなわち，E を含み，同型と直和因子をとる操作について閉じている，$\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})$ の最小の充満部分圏である．

(2) $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})$ の傾部分圏 E は，${}^{\alpha}U \in E$ がすべての $U \in E$ と $\alpha \in G$ に対して成り立つとき，G-**安定**という．

(3) 2 つの圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ は，それらの導来圏 $\mathcal{D}(\operatorname{Mod}\mathcal{C})$ と $\mathcal{D}(\operatorname{Mod}\mathcal{C}')$ が三角圏として同値であるとき，**導来同値**であるという．

定理 7.4. $P\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ を標準被覆関手とすると，$P_{\bm{.}}$ は G-前被覆関手

$$P_{\bm{.}}\colon \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C}) \to \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C}/G)$$

を導く．

定理 4.8 と 7.4 を用いて証明される次の定理は，導来同値のための被覆理論における基本定理である．

定理 7.5. $\mathcal{C}$ に対する，G-安定な傾部分圏 E が存在すれば，$\mathcal{C}/G$ と E/G は導来同値である．

上の定理と補題 4.9(2) から次が得られる．

定理 7.6. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ を G-圏とする．$\mathcal{C}$ に対する G-安定な傾部分圏 E と，G-同変な圏同値 $E \to \mathcal{C}'$ が存在すれば，$\mathcal{C}/G$ と $\mathcal{C}'/G$ は導来同値である．

8. 例

この節では，G を位数 2 の巡回群 $\langle a \mid a^2 = 1\rangle$ とし，$\Bbbk$ を体とする．

例 8.1. $(\mathcal{C}/G)\#G \simeq \mathcal{C}$ の例．
Q を次のクイバーとして，道圏 $\Bbbk Q$ を考える：

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\
2 \arrow[d, "\beta"'] & & 2' \arrow[d, "\beta'"] \\
3 & & 3
\end{tikzcd}$$

a の Q への作用を Q の点の置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2' & 3 & 3' \\ 1 & 2' & 2 & 3' & 3 \end{pmatrix} = (2\ 2')(3\ 3')$ によって定め，a の $\Bbbk G$ への作用をこれの線型化によって定義する．このとき軌道圏 $\Bbbk Q/G$ は次のクイバーと関

係式で与えられる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & 1 \arrow[loop above, "a_1"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\
2 \arrow[rr, bend left=10, "a_2"] \arrow[d, "\beta"'] & & 2' \arrow[ll, bend left=10, "a_{2'}"] \arrow[d, "\beta'"] \\
3 \arrow[rr, bend left=10, "a_3"] & & 3 \arrow[ll, bend left=10, "(a_{3'}"]
\end{tikzcd}$$

$$a_1^2 = e_1, \begin{cases} a_{2'}a_2 = e_2 \\ a_2a_{2'} = e_{2'} \end{cases}, \begin{cases} a_{3'}a_3 = e_3 \\ a_{'}a_{3'} = e_{3'} \end{cases}, \begin{cases} a_2\alpha = \alpha' a_1 \\ a_{2'}\alpha' = \alpha a_1 \end{cases}, \begin{cases} a_3\beta = \beta' a_2 \\ a_{3'}\beta' = \beta a_{2'} \end{cases}.$$

このときこの圏の**基本圏** $\mathcal{B}$（= 同型類の完全代表系からなる充満部分圏）は次の左のクイバーと関係式で与えられる．$\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$ のときには，これは次の右のクイバー（関係式なし）で与えられるものと同型になる：

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop above, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] \\
2 \arrow[d, "\beta"'] \\
3
\end{tikzcd}, \quad \gamma^2 = e_1; \qquad\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"'] & & \bar{1} \arrow[dl, "\bar{\alpha}"] \\
 & 2 \arrow[d, "\beta"'] & \\
 & 3 &
\end{tikzcd}$$

$(\mathcal{C}/G)\#G$ は $\mathcal{C}$ の**二重化** $M_2(\mathcal{C})$（各対象 x に対して，x に同型な対象を 1 つずつ追加したもの）になる．したがって特に，$(\mathcal{C}/G)\#G$ と $\mathcal{C}$ は圏同値である．

例 8.2. $(\mathcal{B}\#G)/G \simeq \mathcal{B}$ の例．

上の例に現れた G-次数圏 $\mathcal{B}$ を考える（$\mathrm{char}\,\Bbbk$ には何も仮定しない）．G-次数は，$\deg(\alpha) = \deg(\beta) = 1$, $\deg(\gamma) = a$ で与えられている．このとき $\mathcal{B}\#G$ は次のクイバーと関係式で与えられる：

$$\begin{tikzcd}
1^{(1)} \arrow[r, shift left, "\gamma^{(1)}"] \arrow[d, "\alpha^{(1)}"'] & 1^{(a)} \arrow[l, shift left, "\gamma^{(a)}"] \arrow[d, "\alpha^{(a)}"] \\
2^{(1)} \arrow[d, "\beta^{(1)}"'] & 2^{(a)} \arrow[d, "\beta^{(a)}"] \\
3^{(1)} & 3^{(a)}
\end{tikzcd}, \quad \gamma^{(a)}\gamma^{(1)} = e_{1^{(1)}}, \gamma^{(1)}\gamma^{(a)} = e_{1^{(a)}}$$

一般論によりこれは，置換 $(1^{(1)}\ 1^{(a)})(2^{(1)}\ 2^{(a)})(3^{(1)}\ 3^{(a)})$ で与えられる自由 G-作用を持つ圏である．$(\mathcal{B}\#G)/G$ はまた，$\mathcal{B}$ の二重化 $M_2(\mathcal{B})$ となり $\mathcal{B}$ と圏同値になる．

例 8.3. $SL(2,4)$ に対する Broué 予想．

Λ と Π を次のクイバーと関係式で与えられる多元環とする：

$$
\Lambda:\ \begin{tikzcd} 2 \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & 1 \arrow[l, shift right, "\alpha_1"'] \arrow[r, shift left, "\beta_1"] & 3 \arrow[l, shift left, "\beta_2"] \end{tikzcd},\quad \begin{cases} \beta_2\beta_1\alpha_2\alpha_1 = \alpha_2\alpha_1\beta_2\beta_1 \\ \alpha_1\alpha_2 = 0 = \beta_1\beta_2 \end{cases}
$$

$$
\Pi:\ \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, shift right, "\alpha_1"'] \arrow[dr, shift left, "\gamma_2"] & \\ 2 \arrow[ur, shift right, "\alpha_2"'] \arrow[rr, shift right, "\beta_2"'] & & 3 \arrow[ul, shift left, "\gamma_1"] \arrow[ll, shift right, "\beta_1"'] \end{tikzcd},\quad \begin{cases} \alpha_2\alpha_1 = \gamma_1\gamma_2 \\ \beta_2\beta_1 = \alpha_1\alpha_2, \\ \gamma_2\gamma_1 = \beta_1\beta_2 \end{cases} \begin{cases} \beta_1\alpha_1 = 0 = \alpha_2\beta_2 \\ \gamma_1\beta_1 = 0 = \beta_2\gamma_2 \\ \alpha_1\gamma_1 = 0 = \gamma_2\alpha_2 \end{cases}
$$

よく知られているように，$\operatorname{char}\Bbbk = 2$ のとき，Λ は，群多元環 $\Bbbk SL(2,4)$ の主ブロックと森田同値であり，Π は，この主ブロックの Brauer 対応子である．Broué 予想は，Λ と Π が導来同値であると主張している．ここでは，$\operatorname{char}\Bbbk = 2$ の仮定なしにこれが成り立つことを示す．まず Λ, Π に G-次数を次で定義する：Λ では，$\deg(\alpha_1) = \deg(\beta_1) := a$ その他の矢の次数は 1．Π では，$\deg(\beta_1) = \deg(\beta_2) := a$ その他の矢の次数は 1．$\Lambda\#G$ および $\Pi\#G$ を計算すると，これらは，

$$
\Lambda\#G \cong T(A),\quad \Pi\#G \cong T(B) \tag{8.1}
$$

の形に表されることが分かる．ただし，A と B は次のクイバーと零関係式で与えられる多元環である：

$$
A := \begin{tikzcd} 2 \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, dash, dashed] & & 3 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dd, dash, dashed] \\ & 1 \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\ 5 \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & 6 \arrow[dl, "\zeta"] \\ & 4 & \end{tikzcd},\qquad B := \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddl, dash, dashed] \arrow[ddr, dash, dashed] & \\ 2 \arrow[dd] & & 3 \arrow[dd] \\ & 4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 6 & & 5 \end{tikzcd}
$$

また，多元環 R に対して，$T(R)$ は R の $DR := \operatorname{Hom}_k(R,k)$ による自明拡大 $R \ltimes DR$ を表す．(8.1) の同型が強い意味の G-同変同型になるように $T(A)$ および $T(B)$ に G-作用を与えると，この作用はどちらの場合にも $a(x) := x + 3 \pmod 6$ で定義されることになる．このとき，主定理により圏同値

$$
\Lambda \simeq T(A)/G,\quad \Pi \simeq T(B)/G \tag{8.2}
$$

があることに注意しておく．$\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj} A)$ の充満部分圏 E を次の 6 個の対象で定義する：$T_i := \underline{e_iA}$ $(i = 2,3,5,6)$, $T_1 := (\underline{e_2A \oplus e_3A} \xrightarrow{(\alpha,\beta)} e_1A)$, $T_4 := (\underline{e_5A \oplus e_6A} \xrightarrow{(\varepsilon,\zeta)} e_4A)$．ただし，下線はその場所が次数ゼロであることを表す．すると，E は傾部分圏となり，同型 $\psi\colon E \to B$ が，B のクバイーの各点 $i = 1,\dots,6$ に対して $T_i \mapsto i$ で定義される．これから，Rickard [10] の方法により標準的に $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj} T(A))$ の傾部分圏 E' と同型 $\psi'\colon E' \to T(B)$ が導かれる．容易に分かるように ψ' が G-同変となるようにとることが

できる．したがって定理 7.6より $T(A)/G$ と $T(B)/G$ は導来同値になる．よって (8.2) より，Λ と Π は導来同値になる．

REFERENCES

[1] Asashiba, H.: *Covering theory of categories without free action assumption and derived equivalences*, preprint, arXiv:0807.4706.

[2] Asashiba, H.: *The 2-categories of G-categories and of G-graded categories are 2-equivalent*, preprint, arXiv:0905.3884.

[3] Beattie, M.: *Duality theorems for rings with actions or coactions*, J. Algebra **115** (1988), 303–312.

[4] Borceux, F.: *Handbook of categorical algebra 1 Basic category theory*, Encyclopedia of Math. and its appl., Cambridge Univ. Press, 1994.

[5] Cibils, C. and Marcos, E.: *Skew category, Galois covering and smash product of a k-category*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (1), (2006), 39–50.

[6] Cohen, M. and Montgomery, S.: *Group-graded rings, smash products, and group actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), 237–258.

[7] Keller, B.: *On triangulated orbit categories*, Doc. Math. **10** (2005), 551-581.

[8] Kelly, G. M. and Street, R.: *Review of the Elements of 2-Categories*, Lecture Notes in Mathematics, **420**, Springer-Verlag (1974), 75–103.

[9] Quinn, D.: *Group-graded rings and duality*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), 155–167.

[10] Rickard, J.: *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure and Appl. Alg. **61** (1989), 303–317.

422-8021 静岡市駿河区大谷 836，静岡大学理学部数学教室